

Teorema di Bernoulli e asse curve

Ipotesi:

- fluido ideale per cui $\mu = -p$ viscosità interna nulla;
 $\Rightarrow \nabla \mu = \nabla(-p) = -\nabla p$
 $\Rightarrow \rho \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \underline{f} \right) = -\nabla p$ eq. di Eulero
- $\underline{f}$ conservativo, $\underline{f} = \nabla \varphi$ con $\varphi = -gz + \text{cost}$
- $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} - \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}$
- fluido incomprimibile $\Rightarrow \rho = \text{cost}$;
- moto stazionario $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$

Allora:

$$\rho \left(\cancel{\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}} + \nabla \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} - \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v} - \nabla \varphi \right) = -\nabla p / \rho$$

$= 0$ per le stazionarietà

$$\Rightarrow \nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} - \varphi + \frac{p}{\rho} \right) = \mathbf{v} \times \nabla \times \mathbf{v}$$

In cui $\nabla \times \mathbf{v} = \underline{\omega}$, vorticità. Quindi:

$$\nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) = \mathbf{v} \times \underline{\omega} \Rightarrow g \nabla \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2g} + z + \frac{p}{\rho g} \right) = \mathbf{v} \times \underline{\omega}$$

In cui $z + \frac{p}{\rho g} = h$, carico piezometrico e $\frac{v^2}{2g}$ carico cinetico.
Sommati danno il carico totale

L'annullamento del teorema di Bernoulli è rappresentabile dall'equazione:

$$g \nabla H = \mathbf{v} \times \underline{\omega}$$

Con $\mathbf{v} \times \underline{\omega} \perp$ sia a $\mathbf{v}$ che a $\underline{\omega}$. Introduciamo l'asse curvilineo:

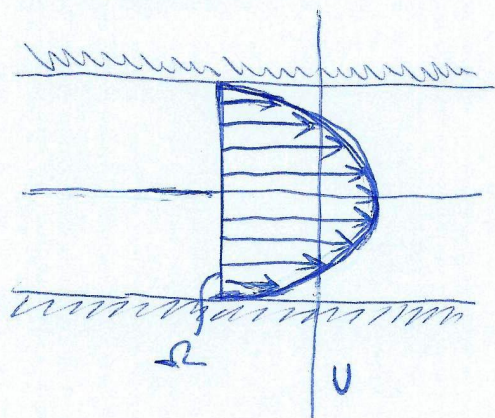
$$g \frac{\partial H}{\partial s} = 0 \Rightarrow H = \text{cost}$$

Moto laminare e turbolento

Una corrente fluida è una quantità di fluido in moto quasi unidirezionale. In una turbolenza il moto è unidirezionale perché tutte le particelle hanno la stessa velocità. In generale la sezione Ω è funzione di spazio e tempo: $\Omega = \Omega(s, t)$.

Due casi particolari:

laminare



turbolento

