Principio della quantità di moto

Usando il teorema del trasporto e la divergenza:

$$\frac{d}{dt}\int_{V'} \rho G \, dV' = \frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho G \, dV + \int_S \rho G \underline{v} \cdot \underline{n} \, dS =$$

$$= \int_V \frac{\partial(\rho G)}{\partial t} dV + \int_V \nabla(\rho G \underline{v}) \, dV =$$

$$= \int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} G + \frac{\partial G}{\partial t}\rho + G\nabla(\rho \underline{v}) + \rho \underline{v} \cdot \nabla G\right] dV =$$

$$= \int_V \left\{\left(\frac{\partial G}{\partial t} + \underline{v}\nabla G\right)\rho + \underbrace{\cancel{\left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \underline{v})\right]}}_{=0 \text{ per cons. massa locale}} G\right\} dV$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\int_{V'} \rho G \, dV' = \int_V \left(\frac{\partial G}{\partial t} + \underline{v}\nabla G\right)\rho \, dV = \int_V \rho \frac{dG}{dt} dV$$

A livello globale:

$$\frac{d}{dt}\int_{V'} \rho \underline{v} \, dV' = \int_V \rho \underline{f} \, dV + \int_S \underline{t} \cdot dS$$

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho \underline{v} \, dV}_{\frac{\partial \underline{M}}{\partial t}} + \underbrace{\int_S \rho \underline{v}(\underline{v} \cdot \underline{n}) \, dS}_{\underline{F_r}^{OUT} - \underline{F_r}^{IN}} = \underbrace{\int_V \rho \underline{f} \, dV}_{\underline{G}} + \underbrace{\int_S \underline{t} \cdot dS}_{\underline{\Pi}}$$

flusso della quantità di moto

$$\Rightarrow \frac{\partial \underline{M}}{\partial t} + \underline{F_r}^{OUT} - \underline{F_r}^{IN} = \underline{G} + \underline{\Pi}$$

A livello locale:

$$\int_V \rho \frac{d\underline{v}}{dt} dV = \int_V \rho \underline{f} \, dV + \int_S \underline{n} \cdot \mathbb{T} \, dS = \int_V \rho \underline{f} \, dV + \int_V \nabla \cdot \mathbb{T} \, dV$$

$$\Rightarrow \int_V \left[\rho\left(\frac{dv}{dt} - \underline{f}\right) - \nabla \mathbb{T}\right] dV = 0$$

$$\Leftrightarrow \rho\left(\frac{dv}{dt} - f\right) = \nabla \mathbb{T} \qquad \text{equazione di Cauchy}$$

Teorema di Bernoulli e ascissa curvilinea

Ipotesi:

- fluido ideale per cui $\mathbb{T} = -p\mathbb{I}$ viscosità interna nulla;

$$\Rightarrow \nabla \mathbb{T} = \nabla(-p\mathbb{I}) = -\nabla p$$

$$\Rightarrow \rho\left(\frac{dv}{dt} - \underline{f}\right) = -\nabla p \quad \text{eq.ne di Eulero}$$

- $\underline{f}$ conservativo, $\underline{f} = \nabla\varphi$ con $\varphi = -gz + \text{cost}$

- $$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \underline{v}\cdot\nabla\underline{v} = \frac{\partial v}{\partial t} + \nabla\frac{\underline{v}\cdot\underline{v}}{2} - \underline{v}\times\nabla\times\underline{v}$$

- fluido incomprimibile $\Rightarrow \rho = \text{cost}$;
- moto stazionario $\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} = 0$

Allora:

$$\cancel{\rho}\left(\underbrace{\cancel{\frac{\partial v}{\partial t}}}_{=0 \text{ per la stazionarietà}} + \nabla\frac{\underline{v}\cdot\underline{v}}{2} - \underline{v}\times\nabla\times\underline{v} - \nabla\varphi\right) = -\nabla p/\rho$$

$$\Rightarrow \nabla\left(\frac{\underline{v}\cdot\underline{v}}{2} - \varphi + \frac{p}{\rho}\right) = \underline{v}\times\nabla\times\underline{v}$$

In cui $\nabla\times\underline{v} = \underline{\omega}$ vorticità. Quindi:

$$\nabla\left(\frac{\underline{v}\cdot\underline{v}}{2} + gz + \frac{p}{\rho}\right) = \underline{v}\times\underline{\omega} \Rightarrow g\,\nabla\left(\frac{\underline{v}\cdot\underline{v}}{2g} + z + \frac{p}{\rho g}\right) = \underline{v}\times\underline{\omega}$$

In cui $z + \frac{p}{\gamma} = h$ carico piezometrico e $\frac{v^2}{2g}$ carico cinetico. Sommati danno il carico totale.

L'enunciato del teorema di Bernoulli è rappresentato dall'equazione:

$$g\nabla H = \underline{v}\times\underline{\omega}$$

Con $\underline{v}\times\underline{\omega} \perp$ sia a $\underline{v}$ che a $\underline{\omega}$. Introduciamo l'ascissa curvilinea:

$$g\frac{\partial H}{\partial s} = 0 \Rightarrow H = \text{cost}$$

Moto laminare e turbolento

Una corrente fluida è una quantità di fluido in moto quasi unidirezionale. In una tubazione il moto è unidirezionale perché tutte le particelle hanno la stessa velocità. In generale la sezione Ω è funzione di spazio e tempo: $\Omega = \Omega(s, t)$.

Due casi particolari: